УДК 536.1 : 514.8

К ВОПРОСУ ОБОСНОВАНИЯ ПОЛОЖЕНИЙ ТЕРМОДИНАМИКИ МЕТОДАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ МНОГОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

ABOUT JUSTIFICATION OF PROVISIONS OF THERMODYNAMICS BY METHODS OF DIFFERENTIAL GEOMETRY OF MULTIDIMENSIONAL SPACES

М.В. Шевцова, Г.В. Аверин, А.В. Звягинцева
M.V. Shevtsova, G.V. Averin, A.V. Zviagintseva

Белгородский национальный исследовательский университет, Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: shevtsova@bsu.edu.ru;averin@bsu.edu.ru; zviagintseva@bsu.edu.ru

Аннотация. Исследования, связанные с аксиоматизацией термодинамики отличаются особой актуальностью, так как термодинамика является основой многих физических наук. Данная наука обладает универсальной теорией с большим потенциалом для развития и возможностями проникновения ее в другие научные области. Развитие аксиоматических методов в термодинамике является важной задачей при изучении сложных систем. В настоящей статье рассмотрены пути построения аксиоматической теории классической термодинамики с использованием математического аппарата дифференциальной геометрии. Преимущество средств геометрии очевидно: она дает наглядность, четкость и объяснимость многих понятий и положений. Исследования в этом направлении позволят получить принципиально новый подход к построению дедуктивной теории и раскрыть геометрическое содержание понятий термодинамики: энтропии, энергии, энтальпии и др.

Resume. The researches in axiomatization of thermodynamics are especially urgent because the thermodynamics is f basis of many physical sciences. This science possesses the universal theory with high potential for development and opportunities of her getting into other scientific areas. Development of axiomatic methods in thermodynamics is an important problem when studying difficult systems. In this article the ways of the axiomatic theory creation in classical thermodynamics are considered using the mathematical methods of differential geometry. Advantages of geometry is obvious: it gives presentation, clearness and explanation of many concepts and provisions. Researches in this direction will allow to receive essentially new approach to creation of the deductive theory and to open the geometrical meaning of concepts of thermodynamics: entropy, energy, enthalpy and etc.

Ключевые слова: аксиоматика, термодинамика, энтропия, энергия, геометрическое обоснование положений термодинамики.

Keywords: axiomatics, thermodynamics, entropy, energy, geometrical justification of provisions of thermodynamics.

Введение

Аксиоматический метод является одним из способов дедуктивного построения научных теорий. В термодинамике процесс аксиоматизации науки длится уже более ста лет и имеет своей целью определение основных понятий, установление закономерностей и фундаментальных законов. Множество подходов указывает на то, что аксиоматическое направление в этой науке, несмотря на длительные годы поисков, находится пока на этапе становления. Поэтому для того, чтобы получить заметный результат в исследованиях данной проблемы, необходимо вернуться к феноменологическим методам, которые обеспечивают тесную связь между теорией и опытом и позволяют создать научную основу для аксиоматизации теории.

Как показал анализ литературных источников, посвященных проблеме аксиоматизации термодинамики, работ, основанных на геометрических представлениях многомерных физических пространств, крайне мало. Данное направление исследований затронуто больше всего в работах

Фалька и Юнга [1], частично в работах К. Каратеодори [2] и Млодзеевского [3]. Однако, сегодня ясного представления о сведении термодинамических процессов и объектов к пространственным геометрическим структурам и отношениям практически нет. Методы дифференциальной геометрии позволяют при геометрическом описании структурированного пространства состояний термодинамических систем сформулировать аксиоматические подходы к изложению основ термодинамики и получить новые данные о содержании фундаментальных термодинамических величин.

Целью данной статьи является изучение возможности применения методов и средств геометрической аксиоматики для построения нетрадиционной системы изложения положений термодинамики, основанной на создании геометрических моделей состояний, процессов и соотношений.

Некоторые существующие аксиоматические подходы в термодинамике

Аксиоматический метод предполагает, что вначале перечисляются основные исходные понятия и даются их определения, после чего выбирается ограниченное количество принимаемых без доказательств утверждений – аксиом или постулатов. Все исходные понятия, аксиомы и постулаты основываются на опытных данных и считаются истинными в силу их очевидности и феноменологического содержания. Далее формулируются основные приемы исследования, логические формы и правила вывода положений теории (методов), позволяющие последовательно выводить одни суждения из других. На основе аксиом и принятых методов все остальные положения теории выводятся путем доказательства теорем и развития исходных положений и утверждений.

Существуют две основные системы изложения основ термодинамики, хотя различных вариаций этих систем наблюдается значительно больше. Традиционный подход изначально был предложен Клаузиусом и другими классиками термодинамики. Аксиоматическая система изложения основ термодинамики введена в науку К. Каратеодори и его последователями. Первую систему обычно критикуют за слишком тесную связь с процессами работы тепловых машин, противоречивость некоторых положений и недостаточную выразительность математического формализма [1, 2, 4 – 10]. Вторую – за абстрактность и формально математический подход к установлению термодинамических понятий, который не соответствует стилю термодинамических исследований и нарушает физическую ясность и простоту основных положений.

Особо отметим, что в обоих подходах используется один исходный принцип, положенный в основание всех последующих выводов. Как справедливо отметил А. Гухман [4], вся система термодинамики формулируется на всеобщем положении незыблемости термодинамической формы уравнения закона сохранения и превращения энергии, которое является фундаментальной закономерностью в изложении термодинамических основ.

На протяжении всего развития термодинамики одним из наиболее важных направлений совершенствования ее теории считается задача аксиоматизации учения об энтропии. В целом аксиоматика термодинамики имеет своей целью определение основных понятий, установление закономерностей и фундаментальных термодинамических законов. Однако все работы в этой области в том или ином виде преследовали в основном одну цель – придать учению об энтропии логическую строгость.

В соответствии с подходом Каратеодори, исходя из логической и математической структуры уравнения сохранения энергии, показывают, что для многих параметров это уравнение представимо дифференциальным уравнением Пфаффа вида: $dQ=P_1(z_1,z_2,...,z_n)dz_1+...+P_n(z_1,z_2,...,z_n)dz_n$, где Q – количество теплоты, z_k – параметры системы, а величины P_k – функции этих параметров. Каратеодори постулировал адиабатическую недостижимость как универсальное свойство всех физических систем и доказал справедливость теоремы: если в окрестности некоторой точки n-мерного пространства существуют точки, не достижимые без нарушения уравнения $dQ=0$, то данное уравнение голономно и для него существует интегрирующий делитель [2]. Далее Каратеодори показывает, что интегрирующим делителем уравнения для элементарного количества теплоты является абсолютная температура в форме универсальной функции эмпирической температуры. В свою очередь, общий интеграл уравнения Пфаффа для количества теплоты определен как энтропия системы, т.е. $ds=dQ/T$.

По мнению А. Гухмана, в данном аксиоматическом варианте учения об энтропии задача обоснования существования энтропии в принципе решена [4]. При этом к полученному доказательству никакие физические гипотезы, кроме постулата адиабатической недостижимости, не привлекаются. Однако, в чем физическая и геометрическая суть принципа адиабатической недостижимости К. Каратеодори не раскрывает. В настоящее время объем опытных данных недостаточен для признания постулата адиабатической недостижимости универсальным физическим принципом.

В свою очередь, при формулировке аксиоматической теории на основе линейных дифференциальных форм Г. Фальк исходил из суждения, что классическое построение термодинамики является не очень строгим и не соответствует тем требованиям, которые предъявляет аксиоматический метод [1]. Он обращал внимание, что уравнение сохранения энергии в виде $dQ=du+dA$ относится к процессам, а не к состояниям, т.е. речь идет о функциях на многообразии кривых – функциях, аргументами которых служат кривые пространства состояния. В свою очередь, функции состояния соответствуют полным дифференциалам. Исходя из этого, он приходит к важному выводу, что формулировка первого начала термодинамики оказывается тесно связанной с понятием непрерывного пространства состояний термодинамических систем.

Фальк пошел по пути нового построения теории, основанной на использовании закономерностей линейных дифференциальных форм в многомерных пространствах, но используемые им аксиомы также не являются очевидными и явно не вытекают из опыта. Однако он впервые предложил геометрический подход аксиоматизации термодинамики на основе теории линейных дифференциальных форм.

Пути построения геометрической аксиоматики термодинамики

В процессе аксиоматизации вначале следует выделить смысловое содержание основных элементов понятийно-категориального аппарата термодинамики, подлежащих в дальнейшем формализации в процессе построения геометрических моделей. Наиболее важными понятиями в рамках этого являются: термодинамическая система, термодинамические величины, состояние системы, термодинамические параметры, равновесные и неравновесные состояния, термодинамические процессы, обратимые и необратимые процессы, функции состояния и функции процесса и т.д.

Сегодня можно на основе геометрических представлений предложить несколько подходов в решении проблемы аксиоматизации термодинамики. Первый путь предполагает представление пространства состояний системы в виде непрерывного многомерного пространства (континуума) и постулирование возможности задания в каждой точке пространства состояний количества теплоты $Q(M)$ в виде непрерывного скалярного поля эмпирической меры, зависящей от параметров состояния системы. Дополнительно к этому в окрестности произвольной точки M принимается аксиома, позволяющая представить связь между количеством теплоты и аналитической функцией температуры $T = T(z_1, z_2, ..., z_n)$, которую можно определить как абсолютную температуру, в виде $dQ{=}c_l{\cdot}dT$. Математически основное отличие скалярного поля количества теплоты от функции температуры состоит в том, что поле $Q(M)$ не связано с выбором системы координат, а функция $T = T(z_1, z_2, ..., z_n)$ связана с выбором координатных осей независимых переменных $z_1, z_2, ..., z_n$. Для того, чтобы обоснованно выбрать вид функции температуры $T = T(z_1, z_2, ..., z_n)$, устанавливают связь этой величины с эмпирической температурой $t = t(M)$, которая однозначно характеризует каждое состояние изучаемой системы.

Второй путь аксиоматизации предполагает постулирование в пространстве состояний факта существования скалярного поля эмпирической меры в виде эмпирической температуры $t = t(M)$ и возможность описания этого поля аналитической функцией $T = T(z_1, z_2, ..., z_n)$, которую также можно определить как абсолютную температуру. Для описания реальных термодинамических процессов дополнительно принимается аксиома, позволяющая представить связь между количеством теплоты и температурой в виде $dQ{=}c_l{\cdot}dT$.

Третья возможность связана с постулированием существования в многомерном пространстве состояний эмпирических мер в виде скалярного поля вероятности состояния системы $w = w(M)$ и скалярного поля количества теплоты $Q(M)$. Вероятность состояния определяется по совместному событию одновременного наблюдения совокупности чисел $z_1, z_2, ..., z_n$, которые являются параметрами свойств системы. Данная вероятность может находиться теоретическим путем или алгоритмически на основании статистической обработки данных опыта. Для создания среды моделирования вводится аналитическая функция абсолютной температуры $T = T(z_1, z_2, ..., z_n)$, которая зависит от выбора координатных осей независимых переменных $z_1, z_2, ..., z_n$. Между количеством теплоты и функцией температуры $T = T(z_1, z_2, ..., z_n)$ постулируется связь в виде $dQ{=}c_l{\cdot}dT$, в свою очередь для вероятности состояния системы постулируется аналогичная связь в виде $dw{=}c_{lw}{\cdot}dp$, где p – геометрическая вероятность состояния M [11]. На основе установления взаимосвязи между изменениями количества теплоты и изменениями вероятности состояния системы в любом процессе определяются уравнения связи между термодинамической и информационной энтропией. При этом предварительно доказывается принцип существования различных видов энтропий для разных эмпирических мер (для количества теплоты и вероятности состояния).

Геометрическое представление задач термодинамики

При построении уравнений состояний термодинамических систем вводится параметризация – пространство состояний представляется областью геометрического числового пространства.

Это позволяет описать каждое состояние набором чисел – параметрами основных свойств системы. Далее все параметры задаются в виде независимых координат точек, а уравнения состояния определяют связь между свойствами системы. Таким образом, для каждого конкретного вещества мы имеем поверхность, соответствующую его уравнению состояния. Любое состояние системы, определяемое совокупностью нескольких параметров, изображается точкой на этой поверхности. Изменение параметров системы определяет термодинамический процесс. Следовательно, соединив все полученные точки, мы получим линию на многомерной поверхности, изображающую процесс изменения параметров системы. Для примера на рисунке 1 представлена поверхность состояния идеального газа $T = T(p,v)$. Здесь v_o – значение удельного объема газа в опорной точке (точке таяния льда); p_o - стандартизированное значение давления, равное 10^5 Па; T_o=273,15 К.

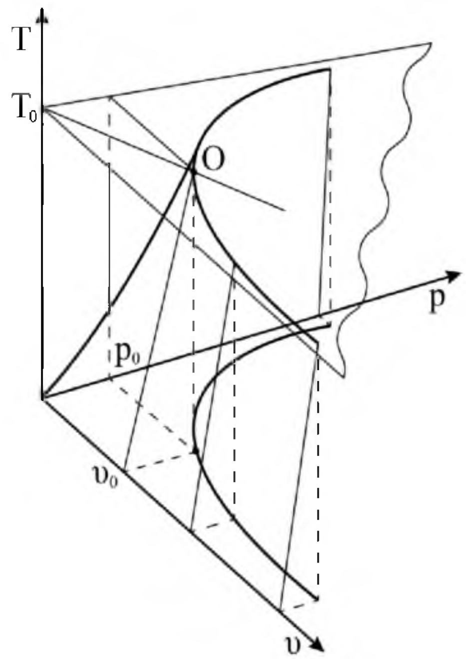

Рис. 1. Геометрическая поверхность состояний идеального газа

Fig. 1. Geometric surface state of an ideal gas

Через заданную точку может быть проведено бесконечное множество линий, принадлежащих целиком поверхности и представляющих собой различные процессы. Касательной к линии в этой точке будет соответствовать определенное значение теплоемкости, характеризующей процесс изменения состояния системы.

Геометрическое представление решаемой задачи в рамках дифференциальной геометрии многомерных пространств может быть описано следующим образом.

Сформируем геометрическое n-мерное пространство переменных для параметров свойств термодинамической системы Ω^n, где $z=(z_1, z_2, ..., z_n)$, $z_k \in \Omega^n$. Точки этого пространства соответствуют n-мерным наборам значений всех переменных $z_1, z_2, ..., z_n$. Таким образом, состояние любого объекта в n-мерном пространстве в каждый момент времени будет отображаться многомерной точкой $M = M(z_1, z_2, ..., z_n)$, процесс изменения состояния объекта во времени – многомерной кривой, которая описывается этой точкой M в пространстве Ω^n. Множество состояний любого вещества может быть представлено некоторой характеристической поверхностью в данном пространстве, а процессы изменения состояний этого вещества – кривыми, лежащими на данной поверхности. Множеству веществ соответствуют семейства поверхностей, а однотипным процессам – семейства кривых.

Основные принципы, используемые при геометрической аксиоматизации классической термодинамики заключаются в следующем [11 – 13].

В основу используемых методов положен континуальный принцип представления числовой информации в пространстве Ω^n. В соответствии с этим принципом среда в виде многомерного пространства показателей считается непрерывной, бесструктурной, а каждый элемент пространства связан со всеми соседними элементами с учетом закономерностей, свойственных изучаемой предметной области. Это позволяет рассматривать имеющиеся опытные данные и термодинамические зависимости, их описывающие, как некоторую выборку из сплошной среды бесконечного множества термодинамических состояний.

Второй принцип основан на гипотезе, что термодинамические данные, зависимости и уравнения состояний формируют в континуальном пространстве некоторый геометрический образ – точку состояния, кривую процесса или поверхность состояния. Данный образ может быть описан в виде многомерных геометрических моделей. С этой целью считаем, что каждому состоянию (каждой точке M) поставлена в соответствие некоторая эмпирическая мера W, которая представляет собой величину, комплексно характеризующую состояние объекта. Мера W определяется в опыте путем измерений и оценок и представляет собой системную величину, например, температуру, количество теплоты, статистическую вероятность событий и т.д. Эта величина в целом однозначно характеризует термодинамическое состояние и зависит от параметров атрибутивных свойств $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Подобный подход позволяет использовать основополагающее понятие математического анализа – скалярное поле, и описать поле эмпирической меры функциональной зависимостью.

Третий принцип связан с возможностью статистического моделирования состояний, уравнений состояний и процессов в геометрическом пространстве переменных, исходя из имеющихся термодинамических зависимостей, полученных в опыте.

Четвертый принцип связан с возможностью феноменологического описания поля эмпирической меры в геометрическом пространстве Ω^n с помощью моделирующих функций. При известном виде таких функции $T = T(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ и значениях переменных $z_1, z_2, \ldots, z_n$, применительно к континуальному пространству Ω^n можно сформулировать несколько аксиом, которые позволяют построить модели континуального пространства состояний.

1. Пусть в пространстве состояний системы Ω^n каждой точке M поставлено в соответствие действительное число W, которое будем называть эмпирической мерой наблюдаемого состояния.

2. Величина $W(M)$ является функцией точки и образует скалярное поле, которое является непрерывным в области Ω^n.

Предположим, что в области Ω^n можно задать аналитическую непрерывную функцию $T = T(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, на основе которой будет формироваться математическая модель. При известном виде функции $T = T(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ и значениях переменных $z_1, z_2, \ldots, z_n$ в области Ω^n можно построить еще одно скалярное поле, которое далее будем называть средой моделирования. Для построения в общем случае феноменологической модели сформулируем следующую аксиому.

3. Пусть в пространстве состояний системы Ω^n скалярные поля величин W и T однозначно связаны между собой. Если в окрестности любой точки M осуществляется некоторый процесс L, то для линии процесса L справедливо соотношение $dW=c_l \cdot dT$, где c_l – эмпирические величины, которые являются функциями процесса и определяются в опыте.

Подобный подход позволяет для описания произвольного процесса l в геометрическом континуальном пространстве получить уравнение Пфаффа вида:

$$dW = c_1 \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial z_1}\right) dz_1 + c_2 \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial z_2}\right) + \ldots + c_n \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial z_n}\right) dz_n, \quad c_k = \left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)_{z_1, z_{k-1}, z_k, \ldots, z_n}. \tag{1}$$

Величины c_k в общем случае могут зависеть от параметров свойств.

Уравнение (1) представляет собой пфаффову дифференциальную форму, которая в самом общем случае может быть голономна или неголономна.

В свою очередь величина T в области Ω^n может быть представлена относительно показателей в виде различных функциональных зависимостей, входящих в классы однородных или мультипликативных функций. Авторами в работах [11 – 13] установлено, что при этих условиях в пространстве Ω^n для построения геометрических моделей описания данных можно использовать квазилинейные многомерные уравнения в частных производных первого порядка, которые тесно связаны с уравнениями Пфаффа вида (1). Такой подход позволяет применить методы решения многомерных уравнений в частных производных первого порядка, основанные на теории характеристических функций, и доказать теорему, что энтропия в термодинамическом представлении является длиной дуги характеристики для поля направлений, порождаемого скалярным полем эмпирической меры состояния W.

Также данный подход позволяет перейти к векторным и дифференциальным уравнениям, характеризующим континуальность пространства состояний термодинамических систем, а также доказать справедливость гипотез, что функции состояния в термодинамике, такие как энтропия, энергия, энтальпия и различные термодинамические потенциалы, могут выступать в качестве естественных криволинейных координат данного континуального пространства. Между декартовыми и криволинейными координатами будет существовать связь, которая определяется уравнениями преобразования координат для данного пространства состояний.

Все это позволяет с абсолютно иных позиций подойти к анализу основных положений термодинамики, так как дает возможность доказать принципы существования энтропии и энергии как функций состояния, а также получить в виде следствий законы сохранения энергии и возрастания энтропии для многомерных термодинамических систем в принятом на сегодня виде [11, 14].

Заключение

Сущность большинства аксиоматических подходов заключается в том или ином способе использования закона сохранения энергии или термодинамической формы уравнения этого закона. Во всех имеющихся системах с этим связано принятие основного постулата или аксиомы. Однако, данное положение по своей сути не является аксиоматическим, т.к. несет в себе закономерности обоснованные как экспериментом и практическим опытом, так и всей логикой и теорией термодинамики. Исходные понятия и аксиомы должны основываться на опыте, быть очевидными и не содержать в себе изначально не аргументированных утверждений.

Следует также отметить, что основные понятия и положения термодинамики имеют четкое геометрическое толкование при описании термодинамических процессов в многомерных пространствах. Но это не касается энтропии – ее дальнейшее определение должно обосновываться из системы аксиом или полученных следствий.

При построении аксиоматики термодинамики также крайне важным является использование геометрических представлений о пространстве состояний термодинамических систем в виде непрерывной многомерной среды. Если рассматривать параметры состояния системы, как декартовы координаты, то подобная геометрическая среда может быть представлена в виде континуального пространства n-измерений. В этом случае состояние термодинамической системы будет отображаться многомерной точкой, а процесс изменения состояния – многомерной кривой. Поэтому в термодинамике можно оперировать понятиями и терминами, определенными в рамках представления многомерного пространства состояний термодинамической системы как геометрического пространства.

Континуальное пространство будет обладать определенными закономерностями, которые характеризуются уравнениями Пфаффа для некоторой физической величины. При этом принцип «адиабатической недостижимости» К. Каратеодори можно рассматривать как следствие существования в многомерном пространстве состояний скалярного поля физической величины. Исходя из этого, появляется идея для геометрической аксиоматизации теории термодинамики и представления термодинамических моделей объектами, структурами и отношениями дифференциальной геометрии.

Таким образом, необходимо развивать аксиоматические методы исследования положений термодинамики, используя методы дифференциальной геометрии многомерных пространств.

Список литературы

1. Falk G. and Jung H. 1959. Axiomatik der Thermodynamik // Hdb. Phys. III/2, Berlin: 119–175.

2. Каратеодори К. 1964. Об основах термодинамики. В кн.: Развитие современной физики: Пер. с нем. М., Наука: 188–222.

Karateodori K. 1964. Ob osnovah termodinamiki. V kn.: Razvitie sovremennoj fiziki [About fundamentals of thermodynamics. In book: Development of modern physics]: Per. s nem. M., Nauka: 188–222.

3. Млодзеевский А.Б. 1956. Геометрическая термодинамика. М., Из-во МГУ, 94.

Mlodzeevskij A.B. 1956. Geometricheskaja termodinamika [Geometrical thermodynamics]. M., Iz-vo MGU, 94.

4. Гухман А.А. 1986. Об основаниях термодинамики. М., Энергоатомиздат, 383.

Guhman A.A. 1986. Ob osnovanijah termodinamiki [About the thermodynamics bases]. M., Jenergoatomizdat, 383.

5. Афанасьева-Эренфест Т.А. 1928. Необратимость, односторонность и второе начало термодинамики. Журн. прикл. физики, т. 5, вып. 3–4: 3–28.

Afanas'eva-Jerenfest T.A. 1928. Neobratimost', odnostoronnost' i vtoroe nachalo termodinamiki [Irreversibility, unilaterality and second law of thermodynamics]. Zhurn. prikl. fiziki, t. 5, Issue 3–4: 3–28.

6. Франкфурт У. 1964. К истории аксиоматики термодинамики. В кн.: Развитие совр. физики: Пер. с нем. М., Наука: 257–292.

Frankfurt U. 1964. K istorii aksiomatiki termodinamiki. V kn.: Razvitie sovr. Fiziki [About thermodynamics axiomatic history. In book: Development of modern physics]: Per. s nem. M., Nauka: 257–292.

7. Шиллер Н.Н. 1898. О втором законе термодинамики и одной новой его формулировке. К., Типография ун-та, 12.

Shiller N.N. 1898. O vtorom zakone termodinamiki i odnoj novoj ego formulirovke [About the second law of thermodynamics and its new formulation]. Kiev, Tipografija un-ta, 12.

8. Петров Н., Бранков Й. 1986. Современные проблемы термодинамики. М., Мир, 285.

Petrov N., Brankov J. 1986. Sovremennye problemy termodinamiki [Modern problems of thermodynamics]. M., Mir, 285.

9. Борн М. 1964. Критические замечания по поводу традиционного изложения термодинамики. В кн.: Развитие современной физики: Пер. с нем. М., Наука: 223–256.

Born M. 1964. Kriticheskie zamechanija po povodu tradicionnogo izlozhenija termodinamiki. V kn.: Razvitie sovremennoj fiziki [Critical remarks concerning a traditional statement of thermodynamics. In book: Development of modern physics]: Per. s nem. M., Nauka: 223–256.

10. Путилов К.А. 1971. Термодинамика. М., Наука, 375.

Putilov K.A. 1971. Termodinamika [Thermodynamics]. M., Nauka, 375.

11. Аверин Г.В. 2014. Системодинамика. Донецк, Донбасс, 405.

Averin G.V. 2014. Sistemodinamika [Systemdynamics]. Doneck, Donbass, 405.

12. Averin G.V., Zviagintseva A.V., Shevtsova M.V. and Kurtova L.N. Probabilistic methods of a complex assessment of quantitative information. Research Journal of Applied Sciences 11 (7): 415 – 418, 2016. – Available at: http://www.medwelljournals.com/abstract/?doi=rjasci.2016.415.418 (accessed August 30, 2016). DOI: 10.3923/rjasci.2016.415.418.

13. Звягинцева А.В. 2016. Вероятностные методы комплексной оценки природно-антропогенных систем / Под. науч. ред. проф. Аверина Г.В. М, Спектр, 257.

Zvjaginceva A.V. 2016. Verojatnostnye metody kompleksnoj ocenki prirodno-antropogennyh system [Probabilistic methods of a complex assessment of natural and anthropogenic systems] / Pod. nauch. red. prof. Averina G.V. M, Spektr, 257.

14. Аверин Г.В. 2015. О принципе существования и законе возрастания энтропии в свете общесистемных представлений системодинамики. Системный анализ и информационные технологии в науках о природе и обществе, №1(8)–2(9): 18–48.

Averin G.V. 2015. O principe sushhestvovanija i zakone vozrastanija jentropii v svete obshhesistemnyh predstavlenij sistemodinamiki [About the principle of existence and the law of increase of entropy in the system-wide representations of systemdynamics]. Sistemnyj analiz i informacionnye tehnologii v naukah o prirode i obshhestve, no 1(8)–2(9): 18–48.